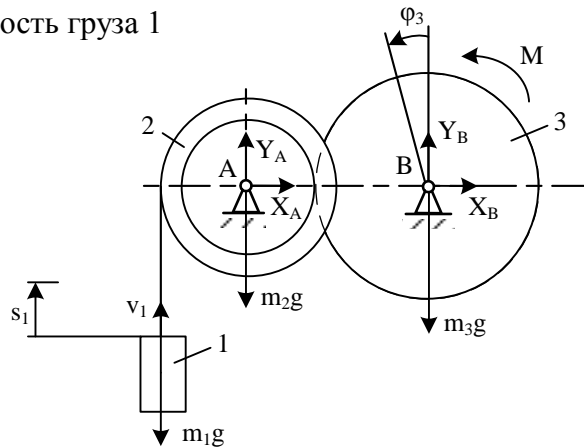


ЗАДАНИЕ ДЗ-1-13

Дано: $s_1 = 2$ м, $v_0 = 0$, $M = 220$ Н·м, $m_1 = 20$ кг, $m_2 = 8$ кг, $m_3 = 15$ кг, $r_2 = 40$ см = 0,4 м, $R_2 = 60$ см = 0,6 м, $R_3 = 70$ см = 0,7 м, $\rho_2 = 50$ см = 0,5 м.

Найти: ускорение груза 1, скорость груза 1

РЕШЕНИЕ:



1. Определение ускорения.

Применим теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k$$

Так как действуют только внешние силы, то

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

Для груза 1: $T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$

Для колеса 2: $T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$

Для колеса 3: $T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2}$

Учтем, что

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$$

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3, \text{ откуда } \omega_3 = \omega_2 \frac{r_2}{R_3} = \frac{v_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3}$$

$$J_2 = m_2 \rho_2^2$$

$$J_3 = \frac{m_3 R_3^2}{2}$$

Тогда

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 \rho_2^2 \left(\frac{v_1}{R_2} \right)^2}{2} + \frac{m_3 R_3^2 \left(\frac{v_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3} \right)^2}{2} = \frac{v_1^2}{2} \left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right)$$

Производная по времени:

$$\frac{dT}{dt} = a_1 v_1 \left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right)$$

Рассмотрим внешние силы системы, имеющие ненулевые мощности:

$$N_{G1} = \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_1 = -m_1 g v_1$$

$$N_M = M \cdot \omega_3 = M \frac{v_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3}$$

Тогда с учетом кинематической связи, запишем мощность системы:

$$\Sigma N_k^e = -m_1 g v_1 + M \frac{v_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3} = v_1 \left(\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g \right)$$

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме принимает вид:

$$a_1 v_1 \left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right) = v_1 \left(\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g \right)$$

Откуда

$$a_1 = \frac{\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g}{m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2}} = \frac{\frac{220}{0,6} \frac{0,4}{0,7} - 20 \cdot 9,8}{20 + 8 \frac{0,5^2}{0,6^2} + 15 \frac{0,4^2}{2 \cdot 0,6^2}} \approx 0,468 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Ответ: $a_1 \approx 0,468 \text{ м/с}^2$

ЗАДАНИЕ ДЗ–2–13

2. Определение скорости.

Применим теорему об изменении кинетической энергии в интегральной форме:

$$T - T_0 = \Sigma A_k^e + \Sigma A_k^i$$

Так как система движется из состояния покоя и работа внутренних сил равна нулю, то

$$T = \Sigma A_k^e$$

Выражение для кинетической энергии системы получено в предыдущем решении

$$T = \frac{v_1^2}{2} \left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right)$$

Рассмотрим внешние силы системы, совершающие ненулевые работы:

$$A_{G1} = \bar{G}_1 \cdot \bar{s}_1 = -m_1 g s_1$$

$$A_M = M \cdot \varphi_3 = M \frac{s_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3} \text{ (угол поворота колеса 3 нашли, интегрируя уравнение угловой скорости)}$$

Тогда сумма работ внешних сил системы:

$$\Sigma A_k^e = -m_1 g s_1 + M \frac{s_1}{R_2} \frac{r_2}{R_3} = s_1 \left(\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g \right)$$

Уравнение теоремы об изменении кинетической энергии в интегральной форме принимает вид:

$$\frac{v_1^2}{2} \left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right) = s_1 \left(\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g \right)$$

Откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2s_1 \left(\frac{M}{R_2} \frac{r_2}{R_3} - m_1 g \right)}{\left(m_1 + m_2 \frac{\rho_2^2}{R_2^2} + m_3 \frac{r_2^2}{2R_2^2} \right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \left(\frac{220}{0,6} \frac{0,4}{0,7} - 20 \cdot 9,8 \right)}{\left(20 + 8 \frac{0,5^2}{0,6^2} + 15 \frac{0,4^2}{2 \cdot 0,6^2} \right)}} \approx 1,368 \text{ (м/с)}$$

Ответ: $v_1 \approx 1,368 \text{ м/с}$